

# Der Einfluß der Bahn-Quantisierung im Magnetfeld auf die Fermische Grenzenergie von Halbleitern I

Von J. APPEL

Aus der OSRAM-Studiengesellschaft, Augsburg

(Z. Naturforsch. 11 a, 689—693 [1956]; eingegangen am 31. Juli 1956)

Es wird der Einfluß der Elektronenbahn-Quantisierung auf die FERMISCHE Grenzenergie  $\zeta$  von Störstellen-Halbleitern sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung der Term-Aufspaltung von Donatoren- bzw. Akzeptoren-Niveaus untersucht. Für einen einfachen Überschuß-Halbleiter mit diskretem Donatoren-Niveau, dessen Daten etwa denjenigen von reinem n-Germanium entsprechen, wird die FERMISCHE Grenzenergie und die Konzentration der Elektronen im L-Band als Funktion der magnetischen Feldstärke  $H$  und der Temperatur  $T$  berechnet. Die Feldstärkeabhängigkeit der Elektronen-Konzentration bei tiefen Temperaturen und schwachen Feldern wird explizit angegeben. Die Übertragung der Ergebnisse auf Lochelektronen-Halbleiter liefert im Falle des p-InSb (scheinbare Lochelektronenmasse  $m^* = \frac{1}{3} m$ ) auch bei Berücksichtigung der Term-Aufspaltung der Akzeptoren-Niveaus gemäß einem LANDÉ-Faktor  $g=1$  eine positive magnetische Widerstandsänderung bei 4° K.

Die FERMISCHE Grenzenergie  $\zeta$  geht als wesentlicher Parameter u. a. in elektrische, thermoelektrische, photoelektrische und Emissions-Eigenschaften von Halbleitern ein. Die Temperaturabhängigkeit von  $\zeta$  haben HUTNER, RITTNER und DU PRÉ<sup>1</sup> in einer ausführlichen Arbeit für verschiedene Halbleitermodelle diskutiert. Der Einfluß magnetischer Felder auf  $\zeta$  als Folge der Bahnquantisierung der Ladungsträger ist bis jetzt nicht untersucht worden. Es ist zu erwarten, daß bei Voraussetzung klassischer Statistik die Änderung von  $\zeta$  und die der Elektronen- und Löcher-Konzentration im Leitungs- bzw. Valenzband infolge der Bahn-Quantisierung der Ladungsträger im Magnetfeld dann nicht mehr unberücksichtigt bleiben darf, wenn die Quantisierungs-Energie der Ladungsträger  $\mu^* H$  ( $\mu^*$  BOHRSCHE Magneton für ein Elektron der scheinbaren Masse  $m^*$ ) in die Größenordnung der mittleren thermischen Energie der Teilchen  $kT$  kommt. Schon bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs und den maximalen, mit Hilfe von Elektromagneten realisierbaren Feldstärken (etwa 30 kG) ist  $\mu^* H/kT$  von der Größenordnung eins, wenn, wie es im allgemeinen bei kovalenten Halbleitern der Fall ist,  $m^* < m$  ist. Da man heute durch kurzzeitige Kondensator-Entladungen über spezielle Solenoide Magnet-Felder bis zu 600 kG erzeugen kann<sup>2</sup>, interessiert die Feldstärkeabhängigkeit von  $\zeta$  auch bei höheren Temperaturen, etwa denen des flüssigen Stickstoffs für  $\frac{\mu^* H}{kT} < 3$ ,

wenn, wie z. B. im Falle des n-Germaniums,  $m^* \approx 0,2 m$  ist.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die genaue Berechnung der Feldstärkeabhängigkeit von  $\zeta$  bei Berücksichtigung der Bahnquantisierung für nicht-entartete Halbleiter. Wir beschränken uns dabei auf tiefe Temperaturen, d. h. auf Störstellen-Halbleiter. Die Rechnung wird an einem einfachen WILSONschen Halbleiter-Modell zunächst ohne und dann mit Berücksichtigung der Term-Aufspaltung der Störstellen-Niveaus durchgeführt. Unter Vernachlässigung der Bahn-Quantisierung und alleiniger Berücksichtigung der Term-Aufspaltung der Störstellen-Zustände haben kürzlich MACKINTOSH und STEVENS<sup>3</sup> zur Erklärung der negativen magnetischen Widerstandsänderung von p-InSb bei Helium-Temperaturen die Feldstärkeabhängigkeit von  $\zeta$  berechnet.

## 1. Die Feldstärkeabhängigkeit der mittleren Elektronen-Energie

Das elektrische Feld  $F$  und das magnetische Feld  $H$  (Vektorpotential:  $A_x = A_y = 0$ ,  $A_z = Hy$ ) seien in die  $x$ -Richtung eines kartesischen Koordinatensystems orientiert. Dann sind die teildiskreten Eigenwerte der Elektronen im L-Band:

$$E = 2 \mu^* H (n + \frac{1}{2}) + \frac{p_x^2}{2 m^*}; \quad (1)$$

$\wp(p_x, p_y, p_z)$  Elektronen-Impuls.

<sup>1</sup> R. A. HUTNER, E. S. RITTNER u. F. K. DU PRÉ, Philips Res. Rep. 5, 188 [1950].

<sup>2</sup> H. P. FURTH u. R. W. WANICK, Rev. Sci. Instrum. 27, 195 [1956].

<sup>3</sup> I. M. MACKINTOSH, Proc. Phys. Soc., Lond. 69, 403 [1956]; K. W. H. STEVENS, Proc. Phys. Soc., Lond. 69, 406 [1956].



Die Energie setzt sich aus einem Translationsanteil in  $x$ -Richtung und einem diskreten Oszillatoranteil in der  $y$ - $z$ -Ebene zusammen. Die zu (1) gehörigen Eigenfunktionen sind:

$$\psi = \varphi_n(y - y_0) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p_x x + p_z z) \right\}, \quad (2)$$

$\varphi_n$  ist die  $n$ -te Eigenfunktion,  $y_0 = c p_z / e H$  die Ruhelage des harmonischen Oszillators.

Die drei Quantenzahlen eines Elektrons sind:  $n$ ,  $l = p_x / \hbar$ ,  $r = p_z / \hbar$  (oder  $y_0 = c p_z / e H$ ). Zur Berechnung der Zustandsdichte für die entarteten Eigenwerte (2) — die Energie  $E$  ist von der Ruhelage eines Oszillators unabhängig — fordern wir in üblicher Weise Periodizität der Eigenfunktionen  $\psi$  mit einem Periodizitätsintervall  $L$  in allen drei Koordinatenrichtungen.  $L$  braucht hier keinen speziellen Forderungen genügen, es möge makroskopische Dimensionen haben<sup>4</sup>. Dann ist die Anzahl  $N(n)$  der Eigenwerte (1) im Impulsintervall  $p_z$  bis  $p_x + \Delta p_x$  bei festem  $n$ :

$$N(n) = L^3 \frac{e H}{h^2 c} \Delta p_x.$$

Danach ist die Anzahl der Elektronen mit einer Oszillator-Quantenzahl  $n$  und einer Impulskomponente zwischen  $p_x$  und  $p_x + \Delta p_x$  pro  $\text{cm}^3$ :

$$f \frac{e H}{h^2 c} \Delta p_x,$$

wobei  $f$  im wesentlichen die Verteilungsfunktion eines nichtentarteten Elektronengases im Magnetfeld ist:

$$f = 8 n_e \left( \frac{\pi \hbar^2}{2 m^* k T} \right)^{3/2} \cdot \frac{\sin \gamma}{\gamma} \exp \left\{ -2 \gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{p_x^2}{2 m^* k T} \right\}, \quad (3)$$

$n_e$  = Elektronen-Konzentration,  $\gamma = \mu^* H / k T$ .

Mit (1) und (3) ist die Gesamtenergie des Elektronengases:

$$E_{\text{ges}} = \frac{2 e H}{h^2 c} \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \left[ 2 \mu^* H \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_x^2}{2 m^*} \right] f dp_x. \quad (4)$$

Die Auswertung von Summe und Integral liefert mit

$$\sum_{n=0}^\infty \exp \left\{ -2 \gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{1}{2 \sin \gamma};$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left( n + \frac{1}{2} \right) \exp \left\{ -2 \gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\} = -\frac{1}{2} \frac{d(1/2 \sin \gamma)}{d\gamma}$$

<sup>4</sup> M. C. STEELE, Phys. Rev. **88**, 451 [1952].

für die mittlere Elektronen-Energie  $\bar{E}$ :

$$\frac{E_{\text{ges}}}{n_e} = \bar{E} = \frac{1}{2} k T (1 + 2 \gamma \text{Ctg } \gamma). \quad (5)$$

Daraus erhält man in den Grenzfällen schwacher bzw. starker magnetischer Felder:

$$E = k T \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \gamma^2 \right), \quad \gamma \ll 1; \quad (5a)$$

$$E = k T \left( \frac{1}{2} + \gamma \right), \quad \gamma \gg 1. \quad (5b)$$

In starken Feldern sind alle Elektronen im Zustand  $n=0$ , dann hängt  $E$  linear von der magnetischen Feldstärke ab und das magnetische Moment ist konstant<sup>5</sup>.

Die Änderung der mittleren Elektronen-Energie infolge der Bahnquantisierung nach (5) ist die eigentliche Ursache für die Änderung der FERMI-schen Grenzenergie und damit — im Falle eines Überschußhalbleiters — für die Änderung der Elektronen-Konzentration  $n_e$  im L-Band. Je größer die magnetische Feldstärke ist, um so weiter entfernt sich das unterste besetzte Energieniveau im L-Band:  $E(n=0, p_x=0) = E_0$  vom unteren Rande des Leitungsbandes:  $E=0$ . Von denjenigen Elektronen im L-Band, deren Energie im feldfreien Fall kleiner als  $E_0$  ist, wird ein gewisser Teil in Donatoren-Zustände zurückfallen. Es werden um so mehr Elektronen aus dem L-Band in Donatoren-Niveaus übergehen, je größer die magnetische Feldstärke ist. Das entsprechende gilt für einen Lochelektronen-Halbleiter. Das magnetische Feld vergrößert bei Berücksichtigung der Bahnquantisierung die mittlere Energie der Lochelektronen dadurch, daß — nach der Konzeption des Bändermodells — z. B. ein Loch in der Nähe des oberen Valenz-Bandrandes durch ein energetisch tiefer gelegenes Elektron aufgefüllt wird, und somit das Lochelektron in einen tiefer gelegenen, quantisierten Energiezustand gelangt.

## 2. Die Fermische Grenzenergie eines Überschußhalbleiters im Magnetfeld

Wir betrachten einen einfachen Überschuß-Halbleiter mit der Donatoren-Konzentration  $n_d$ . Das diskrete Energie-Niveau der Donatoren möge den Abstand  $\Delta E$  vom unteren Rand des Leitungsbandes haben.  $\zeta$  ist durch die Neutralitätsbedingung festgelegt. Es gilt im feldfreien Fall:

$$n_d \left( 1 - \frac{1}{\exp \{ -(\Delta E + \zeta) / k T \} + 1} \right) = 2 \int_0^\infty f_0(E) D(E) dE, \quad (6)$$

<sup>5</sup> A. H. WILSON, The Theory of Metals, Cambridge 1953, S. 164.

wobei  $D(E)$  die Zustandsdichte freier Elektronen der Masse  $m^*$  für eine Spinrichtung ohne Feld ist und  $f_0(E)$  die Energie-Verteilungsfunktion der Elektronen ohne Feld bezeichnet.

Die Integraldarstellung für die Elektronendichte im L-Band auf der rechten Seite von (6) kann auch im Magnetfeld beibehalten werden, wenn nach STEELE u. a. Autoren<sup>6</sup> die Funktion

$$G(E) = \int_0^E D(E) dE$$

eingeführt wird.  $G(E)$  gibt an, wieviel Zustände bei

Berücksichtigung der Quantisierung eine Energie kleiner oder gleich  $E$  haben. Die von STEELE berechnete, komplizierte Funktion  $G(E)$  liefert als magnetisches Moment eines freien entarteten Elektronengases sowohl den monotonen LANDAU- als auch den oszillatorischen HAAS-VAN ALPHEN-Anteil. Wir wollen uns in dieser Arbeit nicht für oszillatorische Effekte interessieren und berechnen daher die Elektronendichte im L-Band durch die Summe über die Oszillator-Quantenzahl  $n$ . Dann ist die Neutralitätsbedingung bei einer Term-Aufspaltung der Donatoren-Niveaus mit einem LANDÉ-Faktor  $g$ :

$$n_d \left\{ 1 - \frac{1/2}{\exp\{-(\Delta E + g \mu H + \zeta)/kT\} + 1} - \frac{1/2}{\exp\{-(\Delta E - g \mu H + \zeta)/kT\} + 1} \right\} \\ = \frac{2 e H}{h^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\left[2 \mu^* H \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_x^2}{2 m^*} - \zeta\right]/kT\right\} = \frac{2(2 \pi m^* k T)^{3/2}}{h^3} \frac{\gamma}{\sin \gamma} \exp\{\zeta/kT\}. \quad (7)$$

Wenn  $g=0$  ist – die Term-Aufspaltung der Donatoren-Niveaus wird nicht berücksichtigt –, so erhält man  $z = \exp(\zeta/kT)$  als positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$z^2 + \exp\{-\Delta E/kT\} \cdot z = \frac{n_d \exp\{-\Delta E/kT\}}{P \cdot \gamma / \sin \gamma}; \quad P = \frac{2(2 \pi m^* k T)^{3/2}}{h^3}. \quad (7a)$$

Für  $g \neq 0$  erhält man nach (7)  $\zeta$  aus einer kubischen Gleichung für  $z$ .  
Mit

$$y = \frac{\exp\{(\zeta + \Delta E)/kT\}}{2 \cos(g \gamma \cdot m^*/m)} + \frac{1}{3} \quad (8)$$

ist die reduzierte Form dieser kubischen Gleichung:

$$y^3 + y \left\{ \frac{1}{4 \cos(g \gamma \cdot m^*/m)} \left( \frac{1}{\cos(g \gamma \cdot m^*/m)} - \frac{n_d \exp\{\Delta E/kT\}}{P \cdot \gamma / \sin \gamma} \right) - \frac{1}{3} \right\} \\ + \frac{1}{12} \left\{ \frac{4}{9} \frac{n_d \exp\{\Delta E/kT\}}{P (\gamma / \sin \gamma) \cos(g \gamma \cdot m^*/m)} \left( \frac{3}{2 \cos^2(g \gamma \cdot m^*/m)} - 1 \right) - \frac{1}{\cos^2(g \gamma \cdot m^*/m)} \right\} = 0. \quad (7b)$$

In den Donatoren-Zuständen ist  $m = m^*$ .

Ist  $y_1$  die interessierende Wurzel von (7b), so erhält man mit

$$P = 4,9 \cdot 10^{18} \left( \frac{T}{100} \frac{m^*}{m} \right)^{3/2} \\ (T = \text{absolute Temperatur})$$

als Elektronen-Konzentration im L-Band:

$$n_e(H, T) = P \frac{\gamma}{\sin \gamma} \left( y_1 - \frac{1}{3} \right) 2 \cos(g \gamma \cdot m^*/m) \cdot \exp\{\Delta E/kT\}. \quad (9)$$

Bei tiefen Temperaturen, hinreichend großen Wer-

ten von  $\Delta E$  und  $n_d$  und nicht zu starken magnetischen Feldern (Beispiel s. u.) ist nach (7b) und (9):

$$n_e(H, T) = n_e^0(T) \left( \frac{\gamma \cos(g \gamma \cdot m^*/m)}{\sin \gamma} \right)^{1/2}. \quad (9a)$$

Dabei ist

$$n_e^0(T) = (n_d P)^{1/2} \exp\{-\Delta E/2 kT\}$$

die thermische Gleichgewichts-Konzentration der Elektronen ohne Feld. In schwachen magnetischen Feldern liefert (9a) bei Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung in  $H^2$ :

$$n_e = n_e^0 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{2} \frac{m}{m^*} \frac{\mu H}{kT} \right)^2 \left[ \frac{1}{3} - \left( \frac{g m^*}{m} \right)^2 \right] \right\}. \quad (9b)$$

<sup>6</sup> I. c. <sup>4</sup>, s. auch A. W. SAÉNZ u. R. C. O'ROURKE, Rev. Mod. Phys. 27, 381 [1955].

### 3. Diskussion der Ergebnisse; $\zeta(H, T)$ und $n_e(H, T)$ für einen Spezialfall

Aus (9b) folgt mit dem LANDÉ-Faktor  $g = 1$ :

$$n_e/n_e^0 \leq 1 \quad \text{für} \quad m^*/m \leq \sqrt{1/3} \approx 0,577.$$

Die entsprechende Ungleichung gilt für Lochelektronen-(p-)Halbleiter. Danach kann das negative Vorzeichen der transversalen magnetischen Widerstandsänderung von p-InSb<sup>7</sup> ( $m^* = \frac{1}{6}m$ ) bei Temperaturen des flüssigen Heliums unter der Annahme eines diskreten Energie-Niveaus der Akzeptoren bei konsequenter Berücksichtigung sowohl der Bahn-Quantisierung der Lochelektronen als auch der Term-Aufspaltung der Akzeptoren-Zustände nicht erklärt werden.

Wir haben als Beispiel für einen WILSONschen Halbleiter mit den Daten

$$n_d = 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}, \quad \Delta E = 0,01 \text{ eV}, \quad m^* = 0,2 m$$

die FERMISCHE Grenzenergie  $\zeta$  und die Konzentration der Elektronen im L-Band  $n_e$  zunächst ohne Berücksichtigung der Term-Aufspaltung der Donatoren-Niveaus ( $g=0$ ) im Temperatur-Bereich von  $4^\circ$  bis  $300^\circ \text{ K}$  mit Gl. (7b) untersucht. Bei tiefen Temperaturen haben wir für das gleiche Modell  $\zeta$  und  $n_e$

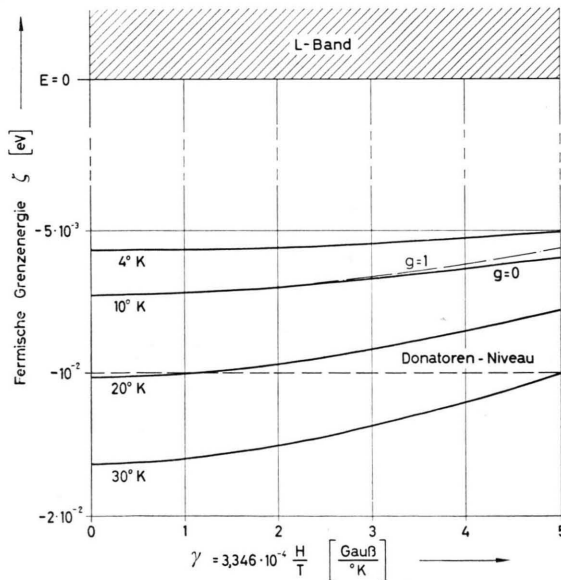


Abb. 1. Die Feldstärkeabhängigkeit der FERMISCHEN Grenzenergie  $\zeta$  für einen Überschuß-Halbleiter mit diskretem Donatoren-Niveau:  $n_d = 2 \cdot 10^{14}$ ,  $\Delta E = 0,01 \text{ eV}$ ,  $m^* = 0,2 m$  ( $g=0$  ohne,  $g=1$  mit Berücksichtigung der Term-Aufspaltung der Donatoren-Zustände).

<sup>7</sup> H. FRITSCHKE u. K. LARK-HOROVITZ, Phys. Rev. **99**, 400 [1955].

unter Berücksichtigung der Term-Aufspaltung mit einem LANDÉ-Faktor  $g = 1$  berechnet. Die Feldstärkeabhängigkeit von  $\zeta$  ist für tiefe Temperaturen und die beiden Fälle  $g=0$  bzw.  $1$  vergleichsweise in Abb. 1 dargestellt (vgl. auch Tab. 1a und 2). Das wesentliche Ergebnis ist, daß mit zunehmender magneti-

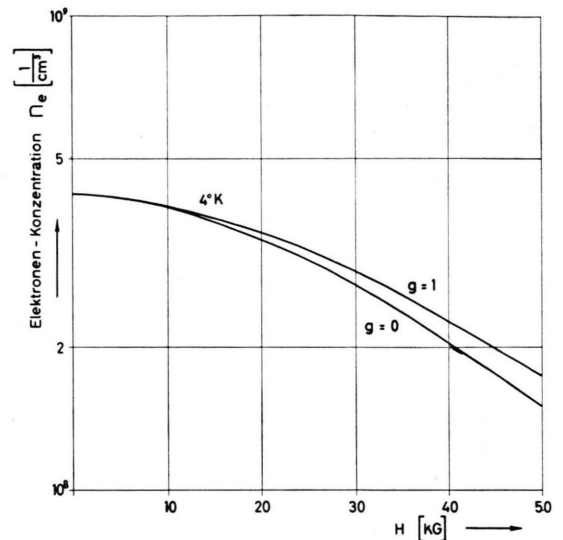


Abb. 2. Die Feldstärkeabhängigkeit der Elektronen-Konzentration  $n_e$  im L-Band bei  $4^\circ \text{ K}$  (vgl. Abb. 1).

scher Feldstärke  $\zeta$  stets zum Leitungsband „hin gebogen wird“. Die damit verknüpfte Abnahme von  $n_e$  mit wachsender Feldstärke zeigt für  $4^\circ \text{ K}$  die Abb. 2. Danach nimmt bei dem zugrunde gelegten

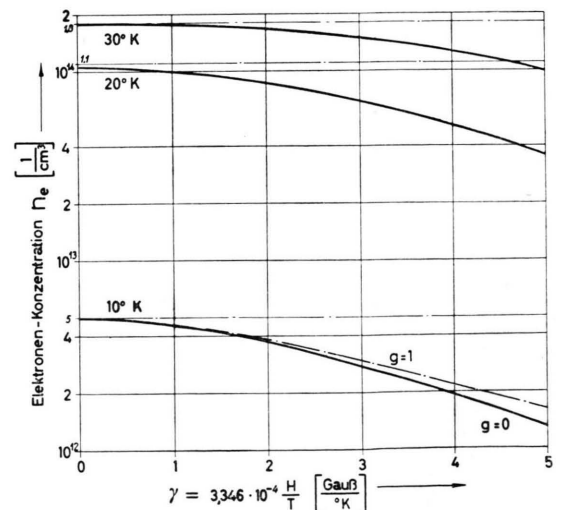


Abb. 3. Die Feldstärkeabhängigkeit der Elektronen-Konzentration  $n_e$  im L-Band bei tiefen Temperaturen (vgl. Abb. 1).

Halbleiter-Modell, dessen Daten etwa denjenigen von n-Germanium mit einem spezifischen Widerstand von  $\varrho = 10 \Omega \text{cm}$  bei Zimmertemperatur entsprechen, bei  $4^\circ \text{K}$  und 25 kG die Elektronen-Konzentration  $n_e$  auf 70% der thermischen Gleichgewichtskonzentration  $n_e^0$  ab (bei  $10^\circ \text{K}$  und 25 kG ist  $n_e/n_e^0 = 0,93$ ). Bei Zimmertemperatur hat die Bahn-Quantisierung praktisch keinen Einfluß mehr auf

die Elektronen-Konzentration im L-Band. In dem untersuchten Feldstärkebereich  $0 \leq H < 5 \cdot 10^3 \text{ kG}$  ändert sich  $n_e$  um weniger als 1% (vgl. die genauen Zahlenwerte in Tab. 1 im Anhang).

Herrn Prof. KRAUTZ danke ich für die stete Förderung dieser Arbeit und für wertvolle Diskussionen. Herrn Prof. P. BRAUER danke ich für anregende Diskussionen.

### Anhang

Tabellen für die Feldstärkeabhängigkeit von  $\zeta$  und  $n_e$  bei einem einfachen Überschuß-Halbleiter mit diskretem Donatoren-Niveau.

$T (^\circ \text{K})$	$\gamma=0$	0,2	0,5	1	2	3	5
4	0,5494	0,5492	0,5487	0,5466	0,5391	0,5286	0,5030
10	0,6838	0,6835	0,6821	0,6737	0,6578	0,6313	0,5667
20	1,020	1,019	1,015	1,001	0,9524	0,8871	0,7397
30	1,551	1,550	1,542	1,514	1,416	1,285	1,003
40	2,183	2,181	2,172	2,132	1,987	1,780	1,330
50	2,873	2,871	2,856	2,804	2,621	2,366	1,771
60	3,586	3,582	3,565	3,503	3,281	2,970	2,232
80	5,076	5,072	5,048	4,965	4,667	4,247	3,240
100	6,633	6,627	6,597	6,494	6,120	5,596	4,324
200	15,06	15,04	14,98	14,78	14,03	12,98	10,42
300	24,16	24,14	24,08	23,74	22,62	21,04	17,19

Tab. 1 a. Die FERMISCHE Grenzenenergie  $\zeta \cdot 10^{+2} (-\text{eV})$  für einen Überschuß-Halbleiter:  $n_d = 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\Delta E = 0,01 \text{ eV}$ ,  $m^*/m = 0,2$  bei Berücksichtigung der Elektronen-Bahnquantisierung;  $\gamma = \mu^* H/kT$ .

$T (^\circ \text{K})$		$\gamma=0$	0,2	0,5	1	2	3	5
4	$n_e \cdot 10^{-8}$	4,220	4,206	4,136	3,894	3,134	2,310	1,096
10	$n_e \cdot 10^{-12}$	4,974	4,960	4,870	4,592	3,706	2,738	1,303
20	} $n_e \cdot 10^{-14}$	1,0576	1,0554	1,0436	1,0034	0,8682	0,6840	0,3618
30		1,7872	1,7868	1,7808	1,7588	1,6660	1,5010	1,0052
40		1,9730	1,9718	1,9544	1,9490	1,9234	1,8670	1,5776
50		1,9760	1,9746	1,9730	1,9700	1,9544	1,9122	1,7138
60		1,9870	1,9868	1,9862	1,9846	1,9762	1,9576	1,8358
80		1,9948	1,9946	1,9940	1,9936	1,9908	1,9866	1,9252
100		1,9972	1,9970	1,9966	1,9950	1,9948	1,9892	1,9584
300		1,99948	1,99948	1,99948	1,99936	1,99894	1,99814	1,99130

Tab. 1 b. Die Elektronen-Konzentration  $n_e (\text{cm}^{-3})$  für einen Überschuß-Halbleiter:  $n_d = 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\Delta E = 0,01 \text{ eV}$ ,  $m^*/m = 0,2$  bei Berücksichtigung der Elektronen-Bahnquantisierung;  $\gamma = \mu^* H/kT$ .

$T (^\circ \text{K})$		$\gamma=0$	0,2	0,5	1	2	3	5
4	$\zeta \cdot 10^{+2}$	0,5494	0,5493	0,5486	0,5463	0,5378	0,5257	0,4954
	$n_e \cdot 10^{-8}$	4,220	4,204	4,141	3,939	3,256	2,513	1,362
10	$\zeta \cdot 10^{+2}$	0,6838	0,6841	0,6818	0,6759	0,6543	0,6247	0,5487
	$n_e \cdot 10^{-12}$	4,974	4,923	4,888	4,640	3,863	2,958	1,608
20	$\zeta \cdot 10^{+2}$	1,020	1,0192	1,0150	1,0011	0,9519	0,8833	0,7179
	$n_e \cdot 10^{-14}$	1,0576	1,0545	1,0437	1,0032	0,8651	0,6991	0,4098

Tab. 2. Die FERMISCHE Grenzenenergie  $\zeta (-\text{eV})$  und die Elektronen-Konzentration  $n_e (\text{cm}^{-3})$  für einen Überschuß-Halbleiter:  $n_d = 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\Delta E = 0,01 \text{ eV}$ ,  $m^*/m = 0,2$  bei Berücksichtigung der Elektronen-Bahnquantisierung und der Term-Aufspaltung der Donatoren-Niveaus ( $g=1$ );  $\gamma = \mu^* H/kT$ .